1. RICHIAMI DI MATEMATICA

D. Per comprendere quanto studieremo insieme, è necessario richiamare alla memoria alcuni concetti di fisica e matematica, dimenticati o mai appresi. Si faccia coraggio.

Si definiscono **grandezze fisiche** quelle entità misurabili con cui si descrivono le trasformazioni fisiche e chimiche. La misurazione di una grandezza è la determinazione del numero che esprime il rapporto tra la grandezza in esame e una grandezza della stessa specie adottata come **unità di misura.**

Le grandezze si rappresentano con lettere, in corsivo (*m*, massa; *V*, volume; *A*, area, ecc.); le loro unità di misura con lettere in tondo (m, *metro;* V, *volt*; A, *ampere*, ecc.).

Non è possibile determinare il *valore vero* di una grandezza, a meno che si tratti di un valore convenzionale.

Esempio Si è stabilito per convenzione che 1 cm = 10 mm e che 1 ft = 12 in (*foot*, piede; *inch*, pollice). 10 e 12 sono *valori veri* per definizione. Quando invece si trova scritto 1 in = 2,54 cm, il numero 2,54 è sicuramente un valore approssimato al centesimo perchè le due unità di misura, decimale e anglosassone, sono state definite l'una indipendentemente dall'altra.

Il risultato di una qualsiasi misurazione è inevitabilmente approssimato e le cifre accettabili del numero che la esprime sono dette *cifre significative*. Per convenzione, la penultima cifra del risultato si considera certa e l'ultima dubbia.

R. Come si calcolano le cifre significative di un numero?

D. Sono cifre significative:
**Le cifre di un numero diverse da zero*.

Esempi. I numeri 345; 34,5; 3,45 contengono tre c.s. I numeri 44 369; 4 436,9; 443,69; 44,369; 4,436 9 ne contengono cinque.

**Gli zeri finali di* m *nei numeri indicati con la notazione esponenziale* $m \cdot 10^n$ e $m \cdot 10^{-n}$ (ne parleremo più avanti).

Esempi. I numeri $6{,}5 \cdot 10^4$; $6{,}50 \cdot 10^{-2}$; $6{,}500 \cdot 10^3$; $6{,}5000 \cdot 10^{-5}$ contengono rispettivamente due, tre, quattro, cinque cifre significative.

**Gli zeri tra due cifre diverse da zero.*

Esempi. I numeri 4,054; 4,005 4; 4,000 54 contengono rispettivamente quattro, cinque, sei c.s. I numeri 0,087; 0,008 7; 0,000 87, ove gli zeri dopo la virgola non si trovano tra due cifre diverse da zero, contengono soltanto due cifre significative e infatti, con la notazione esponenziale, si scrivono rispettivamente $8{,}7 \cdot 10^{-2}$; $8{,}7 \cdot 10^{-3}$; $8{,}7 \cdot 10^{-4}$.

Adesso risponda al quesito: La massa di un oggetto, misurata con una bilancia sensibile al centigrammo, risulta 7,34 g (3 c. s.). Che cosa significa?

R. Beh, che l'oggetto ha la massa di 7,34 g….

D. No. Significa soltanto che la massa vera dell'oggetto è più vicina a 7,34 g che a 7,33 g o a 7,35 g, essendo la seconda cifra decimale dubbia. Se ora la massa dello stesso oggetto viene misurata con una bilancia sensibile al decimilligrammo trovando 7,347 8 g (5 c.s.), la misurazione risulta ovviamente più accurata, essendo la massa vera superiore a 7,347 7 g e inferiore a 7,347 9 g.

Parliamo ora di **arrotondamento.**

I valori sperimentali devono essere manipolati evitando inutili operazioni aritmetiche coinvolgenti cifre prive di significato.

Quando i calcoli si eseguivano a mano, la pigrizia evitava di commettere l'errore di usare cifre non significative; disponendo di calcolatrice, alcuni studenti sono tentati di usare nei calcoli troppi o addirittura tutti i decimali forniti dallo strumento.

I valori numerici devono essere arrotondati in eccesso o in difetto fino a contenere un determinato numero di cifre significative.

* Quando la cifra da eliminare è inferiore è 5 si arrotonda in difetto; quando è superiore a 5 si arrotonda in eccesso.

Esempi. Il numero 63,484, arrotondato a due decimali, diventa 63,48; arrotondato ad un decimale diventa 63,5. Il numero 63,486, arrotondato a due decimali, diventa 63,49 e arrotondato ad un decimale diventa 63,5.

* Quando la cifra che si vuole eliminare è 5, se la cifra che la precede è pari, essa rimane inalterata; se è dispari si arrotonda in eccesso.

Esempi. Il numero 68,945, arrotondato a due decimali, diventa 68,94. Il numero 68,935, arrotondato a due decimali, diventa 68,94.

Arrotondi ad una cifra decimale: a) 42,35 e 42,45. b) Arrotondi, per stadi successivi, fino a due decimali , la costante π = 3,141 592 7. c) Arrotondi il valore della velocità della luce (2,997 924 58$\cdot 10^8$ m/s), per stadi successivi, fino ad una cifra significativa.

R. a) 42,4 e 42,4. b) 3,141 593; 3,141 59; 3,141 6; 3,142; 3,14. c) $3\cdot 10^8$ m/s.

D. Il risultato di un' **addizione** e di una **sottrazione** si arrotonda eliminando le cifre che non sono incolonnate con le cifre significative dell'addendo che ne contiene meno.

Esempio. 13,24 + 2,747 6 = 15,987 6 ≈ 15,99.

Qual è il risultato dell'addizione 0,003 + 650,0?

R. 0,003 + 650,0 = 650,003 ≈ 650,0.

D. Il risultato di una **moltiplicazione** e di una **divisione** si arrotonda fino a che contenga un numero di cifre significative non superiore a quelle del fattore che ne contiene meno.

Esempi. a) 3,45 × 0,2 = 0,69 ≈ 0,7. b) 68,3 × 0,024 = 1,639 2 ≈ 1,6.

Qual è il risultato della divisione 56,2 : 48,76 ?

R. 56,2 : 48,76 = 1,152 584 085 ≈ 1,15.

D. Rivediamo ora le regole per eseguire una **somma algebrica**: quando due numeri da sommare hanno lo stesso segno si sommano i valori assoluti e il risultato conserva il segno degli addendi. Quando i due numeri da sommare hanno segno diverso, si sottrae il valore assoluto minore da quello maggiore; il segno del risultato è quello dell' addendo avente valore assoluto maggiore.

Esempi. + 5 + 2 = + 7; - 5 - 2 = - 7; + 5 - 2 = + 3; - 5 + 2 = - 3; - 1 + 2 - 3 + 4 = +2.

In algebra, nella m**oltiplicazione** e nella **divisione** due numeri da moltiplicare o dividere hanno lo *stesso segno* si moltiplicano o si dividono i valori assoluti ed il risultato è *positivo*; quando i due numeri hanno *segno diverso* il risultato è *negativo*.

Esempi. (+ 2) (+ 6) = + 12; (- 2) (- 6) = + 12; (+ 2) (- 6) = - 12; (- 2) (+ 6) = - 12.

Rivediamo ora **potenze** e **radici**. La *potenza ennesima* a^n di un numero *a* (base) è il numero che si ottiene moltiplicando *a* per sè stesso tante volte quanto è indicato dal numero *n* (esponente)

$a^0 = 1 \qquad a^1 = a \qquad a^2 = a \times a \qquad a^3 = a \times a \times a$ ecc.

$a^{-1} = 1 / a \qquad a^{-2} = 1 / a^2 \qquad a^{-3} = 1 / a^3$ ecc.

$a^m \times a^n = a^{(m + n)} \qquad a^m : a^n = a^{(m - n)} \qquad (a^m)^n = a^{m \times n}$

Casi particolari:
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2b + b^2$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

La *radice ennesima* di un numero *a* (radicando) è il numero *b* che, elevato a potenza ennesima (*n*, indice), riproduce il numero *a*.

$\sqrt[n]{a} = b \qquad b^n = a$

Quando n = 2 (radice quadrata) l'indice si omette. La radice quadrata di un numero si trova facilmente usando una calcolatrice; per calcolare le radici cubica, quarta, quinta, ... si usano i logaritmi, come vedremo.

Esempi. a) $8^2 = 64$; $\sqrt{64} = 8$; b) $8^3 = 512$; $\sqrt[3]{512} = 8$.

I calcoli che coinvolgono numeri molto grandi o molto piccoli sono resi più facili esprimendo i numeri come prodotti di un coefficiente *m* per una potenza di 10, positiva (10^n) o negativa (10^{-n}). Per convenzione, il numero *m* deve essere costituito da una sola cifra intera, con uno o più decimali.

Potenze di 10:

$10^1 = 10$	$10^{-1} = 1/10 = 0{,}1$
$10^2 = 10 \times 10 = 100$	$10^{-2} = 1/100 = 0{,}01$
$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$, ecc.	$10^{-3} = 1/100 = 0{,}001$, ecc.

* Per scrivere un numero in forma esponenziale, se il numero è grande si sposta la virgola a sinistra, e se piccolo a destra, fino a trovare un numero *m* inferiore a 10; il numero degli spostamenti è l'esponente *n* (o - *n*) di 10.

Esempi. 79 600 = $7{,}69 \cdot 10^4$; 1 340 000 000 = $1{,}34 \cdot 10^9$; 0,000 31 = $3{,}1 \cdot 10^{-4}$; 0,000 000 026 = $2{,}6 \cdot 10^{-8}$.

* Per tradurre un numero esponenziale in forma decimale si eseguono le operazioni inverse.
Esempi. $2{,}1 \cdot 10^5$ = 210 000; $5{,}05 \cdot 10^{-4}$ = 0,000 505.

Esprima in forma esponenziale: a) 1 260; b) 101 325; c) 0,000 209; d) 0,000 001 118.

R. a) $1{,}26 \cdot 10^3$; b) $1{,}01325 \cdot 10^5$; c) $2{,}09 \cdot 10^{-4}$; d) $1{,}118 \cdot 10^{-6}$.

D. Esprima in forma decimale: a) $2{,}99\,792\,458 \cdot 10^8$; b) $8{,}85 \cdot 10^{-12}$.

R. a) 299 792 458; b) 0,000 000 000 008 85.

D. Per *addizionare* o *sottrarre* numeri in forma esponenziale si devono uniformare gli esponenti di 10.

Esempio. $9{,}55 \cdot 10^4 + 8{,}00 \cdot 10^2 = 9{,}55 \cdot 10^4 + 0{,}08 \cdot 10^4 = 9{,}43 \cdot 10^4$.

Nelle *moltiplicazioni* e nelle *divisioni* tra numeri esponenziali vale la regola:

$10^a \times 10^b = 10^{a+b}$ $\qquad$ $10^a / 10^b = 10^{a-b}$

Esempi. $9{,}4\cdot10^{-4} \times 1{,}7\cdot10^{-3} = 16\cdot10^{-4+(-3)} = 16\cdot10^{-7} = 1{,}6\cdot10^{-6}$ ·

Per *potenze* e *radici* vale la regola:

$(10^m)^n = 10^{m\times n}$ $\quad \sqrt{10^n} = 10^{n/2}$ $\quad \sqrt{10^{-n}} = 10^{-n/2}$

Esempi. $(4{,}1\cdot10^3)^2 = 16{,}8\cdot10^6 = 1{,}68\cdot10^7$; $\sqrt{10^8} = 10^4$; $\sqrt{10^{-6}} = 10^{-3}$.

Per estrarre la *radice quadrata* e la *radice cubica* di un numero in forma esponenziale si deve rendere l'esponente divisibile rispettivamente per due e per tre.

Esempi. 1) $\sqrt{8{,}1\cdot10^5} = \sqrt{81\cdot10^4} = \sqrt{81} \times \sqrt{10^4} = 9\cdot10^2$;
2) $\sqrt[3]{2{,}7\cdot10^{-14}} = \sqrt[3]{27\cdot10^{-15}} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{10^{-15}} = 3\cdot10^{-5}$.

L'uso della notazione esponenziale permette di confrontare «a colpo d'occhio» due o più valori stabilendo l' **ordine di grandezza** dei numeri che li esprimono, la potenza di 10 più vicina. Quando il coefficiente *m* della espressione $m\cdot10^n$ è maggiore di 5 si arrotonda per eccesso.

Esempio. Per i seguenti numeri: a) $42 = 4{,}2\cdot10^1$ (o.d.g. $10^1 = 10$); b) $67 = 6{,}7\cdot10^1$ (o.d.g. $10^2 = 100$); c) $426 = 4{,}26\cdot10^2$ (o.d.g. $10^2 = 100$); d) $854 = 8{,}54\cdot10^2$ (o.d.g. $10^3 = 1000$).

Sfogliando un Manuale si trovano i seguenti valori della massa: Sole, $1{,}989\cdot10^{30}$ kg; Terra, $5{,}976\cdot10^{24}$ kg; Luna, $7{,}353\cdot10^{22}$ kg. Quale rapporto esiste, approssimativamente, tra i tre corpi celesti?

R. Poiché gli ordini di grandezza delle masse del Sole, della Terra e della Luna sono rispettivamente 10^{30}, 10^{25} e 10^{23}, si può affermare che la massa del Sole è circa centomila volte più grande di quella della Terra ($10^{30} : 10^{25} = 10^5$) e che la Terra ha una massa circa cento volte più grande di quella della Luna ($10^{25} : 10^{23} = 10^2$).

D. Richiamiamo ora il concetto di **logaritmo**. Data l'equazione $x = a^y$, il logaritmo di un numero *x* nella base *a* è l'esponente *y* che si deve dare alla base *a* per ottenere *x*.

Nei *logaritmi decimali* (log o lg), $a = 10$. Nei *logaritmi naturali* (ln), $a = 2{,}718\ 281\ 828\ 459...$.

Data l'equazione $x = 10^y$, y è il logaritmo di x in base 10 per cui il logaritmo decimale di un numero è l'esponente cui si deve elevare 10 per ottenere quel numero

$\lg 10^n = n \qquad \lg 10^{-n} = -n$

Il logaritmo di un numero maggiore di 1 è positivo; il logaritmo di un numero minore di 1 è negativo. *Esempi.*

lg 1000 = lg 10^3 = 3	lg 0,1 = lg 10^{-1} = - 1
lg 100 = lg 10^2 = 2	lg 0,01 = lg 10^{-2} = - 2
lg 10 = lg 10^1 = 1	lg 0,001 = lg 10^{-3} = - 3
lg 1 = lg 10^0 = 0	lg 0,000 1 = lg 10^{-4} = - 4

Proprietà dei logaritmi.

$\lg a \times \lg b = \lg a + \lg b \qquad \lg a / \lg b = \lg a - \lg b$

$\lg a^n = n \times \lg a \qquad \lg \sqrt[n]{a} = 1/n \times \lg a$

Quando non si disponeva di calcolatrici, trovare il logaritmo di un numero, ed il numero corrispondente ad un determinato logaritmo, richiedeva il calcolo della parte intera del logaritmo (*caratteristica*), la noiosa ricerca sulle tavole logaritmiche della parte decimale (*mantissa*) ed eventuali calcoli di interpolazione. Ora il calcolo è immediato. *Esempi.*

lg 6,4 = 0,806	lg 0,64 = - 0,194
lg. 64 = 1,806	lg 0,064 0 = - 1,194
lg 640 = 2,806	lg 0,006 4 = - 2,194

Trovi i logaritmi dei seguenti numeri: a) $6{,}4 \cdot 10^5$; b) lg $6{,}4 \cdot 10^{-5}$.

R. a) $\lg 6{,}4 \cdot 10^5 = \lg 6{,}4 + \lg 10^5 = 0{,}806 + 5 = 5{,}806$; b) $\lg 6{,}4 \cdot 10^{-5} = \lg 6{,}4 + \lg 10^{-5} = 0{,}806 - 5 = -4{,}194$.

D. Il **cologaritmo decimale** (colg) è il logaritmo decimale del reciproco di un numero a:

colg a = lg 1 / a ovvero, essendo colg a = lg 1 - lg a colg a = - lg a

Esempi. a) colg 100 = - log 10^2 = - (2 × lg 10) = - (2 × 1) = - 2; b) colg 0,01 = - log 10^{-2} = - (- 2 × log 10) = 2.

Il cologaritmo decimale di una potenza di 10 è l'esponente cambiato di segno

colg $10^n = - n$ colg $10^{-n} = n$ colg $m \cdot 10^{-n} = n - \lg m$

L' uso dei cologaritmi è particolarmente utile quando nei calcoli sono coinvolti numeri molto piccoli, espressi nella forma $m \cdot 10^{-n}$. Ne incontreremo parecchi.

Esempi. a) colg 10^5 = - 5; b) colg 10^{-5} = 5; c) colg $3,5 \cdot 10^{-4}$ = 4 - lg 3,5 = 4 - 0,554 = 3,456.

Antilogaritmo di un logaritmo (antlg). Dato un numero n, è il numero di cui n è il logaritmo. *Esempi.*

lg x = 1 x = antlg 1 = antlg 10^1 = 10
lg x = 2 x = antlg 2 = antlg 10^2 = 100
lg x = - 1 x = antlg - 1 = antlg 10^{-1} = 0,1
lg x = - 2 x = antlg -2 = antlg 10^{-2} = 0,01

Antilogaritmo di un cologaritmo (antcolg). Dato un numero n, è il numero di cui n è il cologaritmo.

Esempio: colg x = 2,48; antcolg 2,48 = $3,3 \cdot 10^{-3}$.